Sommaire

Le but de ce chapitre est,
- pour un endomorphisme donné d'un espace vectoriel de dimension finie, de rechercher une base dans laquelle son expression sera la plus « simple » possible.
- ou, pour une matrice donnée A, de trouver une matrice semblable à A qui soit aussi la plus « simple » possible.

Remarque :

1. Éléments propres d'un endomorphisme

Dans cette partie, et dans cette partie seulement, on peut travailler dans un espace vectoriel de dimension infinie.

1.1. Valeurs propres et vecteurs propres

Définition : $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$ est un couple valeur propre, vecteur propre de $\varphi \Leftrightarrow \begin{cases} u \neq 0 \\ \varphi(u) = \lambda . u \end{cases}$

> Un vecteur propre n'est jamais nul.

Théorème : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $\varphi \Leftrightarrow \ker(\varphi - \lambda . \mathrm{I}d_E) \neq \{0\}$

Définition : L'ensemble des valeurs propres de φ est le **spectre** de φ.

1.2. Sous espaces propres

Définition : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de φ, on appelle **sous-espace propre** de φ associé à la valeur propre λ, $E_\lambda = \{u \in E,\ \varphi(u) = \lambda.u\}$

C'est donc l'ensemble des vecteurs propres associés à λ auxquels on adjoint le vecteur nul.

Théorème : Le sous espace propre de φ associé à la valeur propre λ, E_λ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda.\mathrm{I}d_E)$ est dons un sous espace vectoriel puisque c'est un noyau. ■

Remarque : Les sous-espaces propres sont stables par l'endomorphisme considéré.
Il en est de même des sous-espaces des sous-espace propres, donc, en particulier des vect(u) quand u est propre.
Il en est aussi de même des sommes de sous-espaces propres !

> On note $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda.\mathrm{I}d_E)$ même quand λ n'est pas valeur propre de φ.
> D'une façon plus particulière, $E_0 = \ker(\varphi)$.
> Ainsi, 0 est valeur propre $\Leftrightarrow$ φ n'est pas injective.

Théorème :

Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Démonstration : Soit $u \in E_\lambda \cap E_\mu$, alors $\varphi(u) = \lambda.u = \mu.u$, d'où $(\lambda - \mu).u = 0$ et comme $\lambda - \mu \neq 0$, $u = 0$. ■

1.3. Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

Théorème : E un $\mathbb{K}$-e.v., $\varphi \in \mathscr{L}(E)$,

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$: n valeurs propres **distinctes 2 à 2**,

$u_1, u_2, \ldots, u_n$: n vecteurs propres associés,

alors la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est libre.

Démonstration : On pose

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

à laquelle on applique φ :

$$\alpha_1 \lambda_1 u_1 + \alpha_2 \lambda_2 u_2 + \cdots + \alpha_n \lambda_n u_n = 0$$

à laquelle on retire λ_n fois la relation précédente, d'où :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) u_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_n) u_2 + \cdots + \alpha_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) u_{n-1} = 0$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que si $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ est libre, alors $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est libre.
Comme (u_1) est libre, on a le résultat. ■

1.4. Exemples

1. Homothétie de rapport λ
   Une homothétie de rapport λ possède une unique valeur propre λ et $E_\lambda = E$.
   Tous les vecteurs, sauf le vecteur nul, sont propres.
2. $E = F \oplus G$

- Soit p la projection sur F parallèlement à G.
  1 et 0 sont les deux valeurs propres, $E_1 = F$ et $E_0 = G$.
  On écrit la décomposition canonique selon la somme directe d'un vecteur non nul, propre pour λ, $u = v + w$, à laquelle on applique p.
  Ce qui donne : $p(u) = v = \lambda v + \lambda w$, et enfin, $(\lambda - 1)v + \lambda w = 0$.
  v et w ne sont pas tous les 2 nuls puisque u ne l'est pas.
  Comme λ ne peut à la fois être égal à 1 et à 0, v et w sont liés et donc l'un des 2 est nul. Ce qui entraîne $\lambda = 1$ et $w = 0$ ou $\lambda = 0$ et $v = 0$.
  Il ne reste qu'à conclure.
- Soit s la symétrie par rapport à F, parallèlement à G.
  1 et -1 sont les deux valeurs propres, $E_1 = F$ et $E_{-1} = G$.
  Le résultat est immédiat en écrivant $s = 2p - \mathrm{I}d$.

3. Soit $E = \mathscr{C}^0[\mathbb{R}]$ et $\varphi : E \to E$ telle que $\varphi(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$

   En un mot, $\varphi(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0.

   On va chercher les éléments propres de φ.

   Il faut d'abord vérifier que φ est bien un endomorphisme, c'est à dire que c'est une application de E dans E qui est linéaire.

   $\varphi(f)$ est clairement continue puisque c'est une primitive d'une application continue.

   De plus φ est bien linéaire par linéarité de l'intégration, φ est donc bien un endomorphisme.

   Cherchons en les éléments propres, c'est à dire les applications f non identiquement nulles et les scalaires λ tels que $\varphi(f) = \lambda \cdot f$

   On écrit cette égalité pour un x quelconque :

   $\varphi(f)(x) = \lambda f(x)$ ou encore $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \lambda f(x)$ pour tout x réel.

   Si $\lambda = 0$, pour tout x réel, $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = 0$, en dérivant, $f(x) = 0$, f est l'application nulle et n'est donc pas un vecteur propre, 0 n'est donc pas valeur propre.

   Donc $\lambda \neq 0$, d'où f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et en dérivant, pour tout x réel, $f(x) = \lambda f'(x)$. On conserve la condition $f(0) = 0$ pour avoir une équivalence.

   f est donc solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre $\lambda y' - y = 0$, ce qui donne $y = K\exp(x/\lambda)$. La valeur en 0 nous donne $K = 0$ et donc f est encore l'application nulle...

   Finalement φ n'a pas de valeur propre.

2. Éléments propres d'une matrice

2.1. Valeurs propres et vecteurs propres

Définition : $\lambda \in \mathbb{K}$ et $U \in \mathbb{K}^n$, un vecteur colonne est un couple valeur propre, vecteur propre de $A \Leftrightarrow \begin{cases} U \neq 0 \\ AU = \lambda.U \end{cases}$

Un vecteur propre n'est jamais nul.

Théorème : $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de $U \Leftrightarrow \ker(A - \lambda.I_n) \neq \{0\}$

Définition : L'ensemble des valeurs propres de φ est le **spectre** de φ.

Remarque : Les couples valeur propre et vecteur propre d'un endomorphisme se correspondent en considérant la matrice d'un endomorphisme dans une base $\mathscr{B}$.
On aura donc les mêmes propriétés que celles qu'on a montré pour les endomorphismes !

2.2. Sous espaces propres

Définition : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A, on appelle **sous-espace propre** de A associé à la valeur propre λ, $E_\lambda = \{U \in \mathbb{K}^n, AU = \lambda.U\}$

C'est donc l'ensemble des vecteurs propres associés à λ auxquels on adjoint le vecteur nul.

Théorème : Le sous espace propre de A associé à la valeur propre λ, E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Démonstration : $E_\lambda = \ker(A - \lambda.I_n)$ est dons un sous espace vectoriel puisque c'est un noyau. ■

Remarque : Les sous-espaces propres sont stables par l'endomorphisme considéré.
Il en est de même des sous-espaces des sous-espace propres, donc, en particulier des vect(U) quand U est propre.
Il en est aussi de même des sommes de sous-espaces propres !

> On note $E_\lambda = \ker(A - \lambda.I_n)$ même quand λ n'est pas valeur propre de φ.
> D'une façon plus particulière, $E_0 = \ker(A)$.
> Ainsi, 0 est valeur propre $\Leftrightarrow$ A n'est pas injective.

Théorème :

Deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Démonstration : Soit $U \in E_\lambda \cap E_\mu$, alors $AU = \lambda.U = \mu.U$, d'où $(\lambda - \mu).U = 0$ et comme $\lambda - \mu \neq 0$, $U = 0$. ■

2.3. Vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

Théorème : $E = \mathbb{K}^n$, $A \in \mathscr{L}(E)$,

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, p valeurs propres **distinctes 2 à 2**,

$U_1, U_2, \ldots, U_p$, p vecteurs propres associés,

alors la famille $\left(U_1, U_2, \ldots, U_p\right)$ est libre.

3. Réduction d'un endomorphisme, d'une matrice

E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathscr{B}$ est une base de E.

φ est un endomorphisme de E. A est la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$.

> En pratique, on travaille le plus souvent avec une matrice carrée A, au besoin en la considérant comme la matrice dans la base canonique d'un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.

3.1. Polynôme caractéristique

On rappelle que le déterminant d'un endomorphisme est celui de sa matrice dans une base quelconque, ce qui donne du sens à la définition suivante :

Définition : On appelle polynôme caractéristique de φ, ou de A, le déterminant de $\lambda.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} - \varphi$, ou de $\lambda \mathrm{I}_n - \mathrm{A}$, noté :

$$\mathrm{P}_{\varphi}(\lambda) = \det(\lambda.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} - \varphi) = \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\lambda) = \det(\lambda.\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$$

Théorème : $\mathrm{P}_{\varphi}(\lambda) = \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\lambda)$ est un polynôme de degré n en λ.

Son terme de plus haut degré est λ^n.

Son terme constant est $\det(-\varphi) = \det(-\mathrm{A})$.

En pratique, il se calcule par $\mathrm{P}_{\varphi}(\lambda) = \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\lambda) = \det(\lambda.\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$ où $\mathrm{A} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\varphi)$ et I_n est la matrice identité.

> De plus, si le polynôme caractéristique $\mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\lambda)$ est scindé, la somme de ses racines est la trace de A.

Théorème :

« Les » racines sur $\mathbb{K}$ de $\mathrm{P}_{\varphi}(\lambda) = \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\lambda)$ sont **exactement** « les » valeurs propres de φ ou de A.

Démonstration : Si λ_i est valeur propre de φ, $(\lambda_i.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} - \varphi)$ n'est pas injective, donc n'est pas un isomorphisme et donc son déterminant est nul.

Réciproquement, si $\det(\lambda_i.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} - \varphi) = 0$, $(\lambda_i.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} - \varphi)$ n'est pas injective, $\ker(\lambda_i.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} - \varphi) \neq \{0\}$ et donc λ_i est valeur propre de φ. ■

Théorème : Si la matrice d'un endomorphisme dans une certaine base est triangulaire, les valeurs propres de cet endomorphismes sont les termes de la diagonale de cette matrice.

Démonstration : $\det(\mathrm{A} - \lambda.\mathrm{I}_n)$ est alors le produit des éléments diagonaux, car cette matrice est toujours triangulaire. Les racines de ce polynôme en λ sont bien les éléments de la diagonale de A. ■

Théorème : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

> La réciproque est fausse !

Démonstration : Si $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, alors :

$$\det(\lambda.\mathrm{I}_n - \mathrm{B}) = \det\left(\lambda.\mathrm{I}_n - \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}\right) = \det\left(\mathrm{P}^{-1}(\lambda.\mathrm{I}_n - \mathrm{A})\,\mathrm{P}\right) = \det(\lambda.\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$$ ■

3.2. Ordre de multiplicité des valeurs propres, dimension des sous espaces propres

Définition : L'ordre de multiplicité de λ_i racine de $\mathrm{P}_{\varphi}(\lambda) = \mathrm{P}_{\mathrm{A}}(\lambda)$ est l'ordre de multiplicité de λ_i valeur propre de φ ou de A.

On parle donc de valeur propre simple, double, multiple...

> Chaque valeur propre est toujours donnée avec son ordre de multiplicité.

Théorème : Pour λ_i valeur propre de φ ou de A,

$$1 \leqslant \dim \mathrm{E}_{\lambda_i} \leqslant \text{Ordre de multiplicité de la valeur propre } \lambda_i$$

Démonstration : Comme λ_i est valeur propre de φ, $\dim E_{\lambda_i} \geqslant 1$.

Soit $p = \dim E_{\lambda_i}$ et $\left(e_1, e_2, \ldots, e_p\right)$ une base de E_{λ_i} qu'on complète par $\left(e_{p+1}, \ldots, e_n\right)$ en une base de E.

Dans cette base, φ a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & a_{1,p+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & a_{p+1,p+1} & \ldots & a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_{n,p+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ d'où

$$P_\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_i & 0 & \ldots & 0 & -a_{1,p+1} & \ldots & -a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda - \lambda_i & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \lambda - a_{p+1,p+1} & \ldots & -a_{p+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -a_{n,p+1} & \ldots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - \lambda_i)^p \begin{vmatrix} \lambda - a_{p+1,p+1} & \ldots & -a_{p+1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{n,p+1} & \ldots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix}$$

en développant successivement par rapport à la première colonne.

Ceci prouve que λ_i est racine de $P_\varphi(\lambda)$, ou de $P_A(\lambda)$ d'ordre au moins p. ∎

> Si λ_i est une valeur propre simple, alors $\dim E_{\lambda_i} = 1$

4. Diagonalisation d'un endomorphisme, d'une matrice

4.1. Diagonalisibilité

Définition : Un endomorphisme φ de E est diagonalisable
$\Leftrightarrow$ E possède une base formée de vecteurs propres de φ
$\Leftrightarrow$ la matrice A est diagonalisable.

> Dans une base de vecteurs propres, la matrice de φ est diagonale. Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.
> A est donc **semblable** à une matrice diagonale.

4.2. Polynôme scindé

Définition : Un polynôme scindé est un polynôme qui peut se factoriser en produit d'expressions du 1^er^ degré.

- $X^2 + 2X + 1 = (X+1)(X+1)$ est scindé sur $\mathbb{R}$ comme sur $\mathbb{C}$,
- $X^2 + X + 1 = (X+j)(X+j^2)$ est scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

En particulier, sur $\mathbb{C}$, tous les polynômes sont scindés.

4.3. Condition Nécessaire et Suffisante de diagonalisibilité

Théorème : E de dimension n, $\varphi \in \mathscr{L}(E)$, φ est diagonalisable
$\Leftrightarrow$ la somme des dimensions des sous espaces propres est n
$\Leftrightarrow$ A est diagonalisable.

La démonstration est admise.

Théorème : (Condition Nécessaire et Suffisante)

$$\varphi, \text{ ou A est diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} P_\varphi(\lambda) = P_A(\lambda) \text{ est scindé et,} \\ \text{Pour chaque } \lambda_i \text{ multiple,} \quad \dim E_{\lambda_i} = \text{ordre de multiplicité de } \lambda_i \end{cases}$$

Théorème : (Condition Suffisante)

Si φ, ou A, admet n valeurs propres distinctes, alors φ, ou A, est diagonalisable.

Démonstration : Toutes les valeurs propres sont simples, chaque sous espace propre est donc de dimension 1... ■

> Dans le cas où l'endomorphisme est diagonalisable, on obtient une base de vecteurs propres en mettant bout à bout une base de chaque sous espace propre.

4.4. Matrice diagonale semblable

Théorème : Si A est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ distinctes ou confondues, de vecteurs propres associés $e_1, e_2, \ldots, e_n$.
On appelle P la matrice de passage constituée en colonnes, et dans cet ordre, des coordonnées de $e_1, e_2, \ldots, e_n$ écrits dans la base d'origine. Alors

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On ne suivra la méthode donnée que si n est « petit » et quand l'énoncé ne guide pas vers une autre.

> A est ici diagonalisable, mais **n'est pas** diagonale, c'est D qui est diagonale...

4.5. Diagonalisibilité et diagonalisation

Quand une matrice A est **diagonalisable**, une erreur courante est de dire que, *dans une certaine base*, A est diagonale, ce qui est bien sûr grossièrement faux et même stupide.

On a simplement une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que : $A = PDP^{-1}$, ou bien, $D = P^{-1}AP$.

La confusion provient de ce que A et D sont les matrices d'un **même** endomorphisme dans deux bases différentes...

Il est par contre exact de dire que si un endomorphisme φ est diagonalisable, et s'il est de matrice A dans la base $\mathcal{B}$, il existe une base $\mathcal{B}'$ dans laquelle la matrice de φ est D, diagonale.

P étant la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$, on a alors : $A = PDP^{-1}$ et $D = P^{-1}AP$.

4.6. Matrice symétrique réelle

Théorème : (théorème spectral)
Une matrice **symétrique réelle** est diagonalisable avec, au besoin, une matrice de passage orthogonale.

Ce théorème, très utile en pratique, n'est ici que pour mémoire, on se reportera au chapitre suivant.

5. Recherche pratique

5.1. Diagonalisibilité

- On calcule $P_A(\lambda)$.
  - Si $P_A(\lambda)$ n'est pas scindé (on est donc sur $\mathbb{R}$), A n'est pas diagonalisable. On a terminé. On peut au besoin continuer sur $\mathbb{C}$.
- On factorise $P_A(\lambda)$, en particulier, on cherche les valeurs propres multiples.
  - S'il n'y en a pas, A est diagonalisable. On a terminé.

  On cherche la dimension de chaque sous espace propre associé à une valeur propre multiple.

  On utilisera parfois $\dim E_{\lambda_i} = n - rang\,(A - \lambda_i.I_n)$.
  - Si chaque dimension est l'ordre de multiplicité de la valeur propre, A est diagonalisable. On a terminé.
  - Sinon, A n'est pas diagonalisable. On a terminé.

5.2. Exemples

- $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Son polynôme caractéristique est : $4\,\lambda^2 + 1$ qui n'a pas de racines réelles, et donc, cette matrice n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. En effet, 2 est valeur propre double et le sous-espace propre est de dimension 1.

  En effet, $A - 2\,I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 1 et donc E_2 est de dimension $2 - 1 = 1 \neq 2$.

5.3. Diagonalisation

Dans ce paragraphe, on supposera que A est effectivement diagonalisable.

La méthode la **plus souvent utilisée** consiste à :
- calculer $P_A(\lambda)$;
- factoriser $P_A(\lambda)$, chercher les valeurs propres ;
- pour chaque valeur propre, chercher une base du sous espace propre associé ;
- on obtient une base de vecteurs propres en mettant bout à bout les différentes bases des sous espaces propres.

Sinon, on peut aussi parfois revenir à la définition en cherchant les couples valeur propre, vecteur propre.

5.4. Exemples

On va diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $n \geqslant 3$.

Cette matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable.

a/ Première méthode

On utilise ici une méthode très particulière, applicable seulement quand le rang de A est petit.

La matrice est clairement de rang 2, 0 est donc valeur propre d'ordre exactement $n-2$ compte tenu de la diagonalisibilité.

Le sous-espace propre, qui est le noyau, est facile à déterminer, il est défini par $\begin{cases} x_n = 0 \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = 0 \end{cases}$

Il ne nous manque que la ou les deux valeurs propres non nulles. Compte tenu de la trace nulle, ce sont deux valeurs propres opposées.

On cherche les vecteurs $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tels que $AX = \lambda X$, avec $\lambda \neq 0$,

ce qui donne $\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_n = \lambda x_2 \\ \\ x_n = \lambda x_{n-1} \\ x_1 + \cdots + x_{n-1} = \lambda x_n \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x_n = \lambda x_1 \\ x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} \\ (n-1)\, x_1 = \lambda^2 x_1 \end{cases}$

On utilise alors cette dernière équation. $x_1 = 0$ entraîne $X = 0$ ce qui est impossible.

On a donc $\lambda = \pm\sqrt{n-1}$ qui sont les deux autres valeurs propres.

Les sous-espaces propres correspondants sont engendrés par $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$.

b/ Deuxième méthode

On cherche plus classiquement le polynôme caractéristique.

On obtient alors $\Delta_n = \lambda^n - (n-1)\,\lambda^{n-2}$ par simple récurrence facile à obtenir. Ce qui fournit bien sûr les mêmes valeurs propres qu'avec la méthode précédente.

Il ne reste qu'à chercher les sous-espaces propres correspondants.

6. Réduction d'un endomorphisme, d'une matrice, non diagonalisable

6.1. Trigonalisation

Théorème : E de dimension n, $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, tel que le polynôme caractéristique de φ est scindé, alors il existe une base où la matrice de φ est triangulaire.

Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.

Théorème : A une matrice carrée telle que le polynôme caractéristique de A est scindé, alors il existe une matrice triangulaire T semblable à A.

Les valeurs propres se trouvent sur la diagonale, chacune autant de fois que son ordre de multiplicité.

La démonstration de ces deux théorèmes est admise.

6.2. Trace et Valeurs Propres

La trace d'un endomorphisme est la somme des éléments diagonaux de sa matrice dans une base quelconque. Ce qui nous donne :

Théorème : Quand le polynôme caractéristique est scindé, la trace d'un endomorphisme, qui est la somme des éléments diagonaux de sa matrice dans une base quelconque, est égale à la somme de ses valeurs propres, chacune comptée autant de fois que son ordre de multiplicité.

> On peut toujours appliquer ce théorème en considérant les racines réelles et complexes du polynôme caractéristique.

Démonstration : Il suffit de se placer dans une base où la matrice est triangulaire. Les valeurs propres sont alors sur la diagonale. ■

> Ceci permet souvent de vérifier la cohérence des calculs de valeurs propres...
>
> On fera **systématiquement** cette vérification après la recherche des valeurs propres d'une matrice.

6.3. Recherche d'une base trigonalisante

On va travailler sur un exemple courant :

E est de dimension 3, λ_1 est valeur propre simple, λ_2 valeur propre double de φ, ou de A.

De plus $\dim \mathrm{E}_{\lambda_1} = \dim \mathrm{E}_{\lambda_2} = 1$. φ n'est donc pas diagonalisable mais est trigonalisable.

En principe, dans une telle recherche, l'énoncé doit vous guider. Ici,

- On cherche e_1 base de E_{λ_1}
- On cherche e_2 base de E_{λ_2}
- On cherche e_3 tel que $(\varphi - \lambda_2.\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})(e_3) = e_2$
- On vérifie que (e_1, e_2, e_3) est bien une base de E

Dans cette base, la matrice de φ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

6.4. Triangularisation d'un endomorphisme ou d'une matrice nilpotents

Rappelons qu'une matrice A est nilpotente si et seulement si il existe p tel que $A^p = 0$. On a la même définition pour un endomorphisme nilpotent.

Si X est un vecteur propre de A pour la valeur propre λ, alors il est aussi vecteur propre de A^p pour la valeur propre λ^p.

Que l'on travaille sur $\mathbb{C}$ ou sur $\mathbb{R}$, le polynôme caractéristique est scindé et l'unique valeur propre est nulle.

A est donc semblable à une matrice strictement triangulaire.

On peut même montrer que A est semblable à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

où les ε_i valent 0 ou 1. Mais ceci est hors-programme...

7. Forme ultime en dimension 3

On considère ici un endomorphisme en dimension 3 dont **le polynôme caractéristique est scindé**.

On va décrire la **meilleure** forme que peut avoir sa matrice dans une certaine base, selon les ordres de multiplicité des valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

7.1. Trois valeurs propres simples

L'endomorphisme est diagonalisable et a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.

7.2. Deux valeurs propres, une simple et une double

- Si l'endomorphisme est diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.
- Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.

  On constitue cette base comme dans l'exemple étudié au paragraphe 6.3..

7.3. Une valeur propre triple

- Si l'endomorphisme est diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ dans une base bien choisie.

  C'est l'homothétie de rapport λ. L'endomorphisme a d'ailleurs cette matrice dans n'importe quelle base ...

- Si l'endomorphisme n'est pas diagonalisable, il a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si le sous-espace propre est de dimension 2 ou $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si le sous-espace propre est de dimension 1, toujours dans une base bien choisie.

  Ici, l'énoncé doit vous guider dans la recherche de cette base.

8. Suites récurrentes linéaires

8.1. C'est un problème linéaire

Le but est de déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = d, \quad a, b, c, d \in \mathbb{K} \tag{1}$$

On considère E l'espace vectoriel des suites sur $\mathbb{K}$, et

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{E} & \to & \mathrm{E} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}$$

φ est clairement linéaire. Il s'agit de résoudre

$$\varphi\left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (d)_{n\in\mathbb{N}}$$

où $(d)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite constante. On se retrouve donc face à une équation linéaire.

On va donc chercher les solutions de l'équation homogène associée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a\,u_{n+2} + b\,u_{n+1} + c\,u_n = 0$$

Ces solutions forment un sous espace vectoriel de E.

Il suffira d'ajouter une suite qui est solution particulière de (1).

8.2. Suites vérifiant $u_{n+1} - a\,u_n = b$

a/ $u_{n+1} - a\,u_n = 0$

Ce sont les suites géométriques de raison a, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n\,u_0.$

b/ $u_{n+1} - a\,u_n = b$

On cherche d'abord une solution particulière sous forme de suite constante $v_n = k$, ce qui donne $(1-a)\,k = b$.

- Si $a \neq 1$, on trouve $k = \dfrac{b}{1-a}$, et donc $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n\,\alpha + \dfrac{b}{1-a}$ où α s'exprime en fonction des conditions initiales : $\alpha = u_0 - \dfrac{b}{1-a}$.
- Si $a = 1$, la suite est arithmétique, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nb$

Une fois qu'on a l'expression générale de la solution, on tient compte des conditions initiales éventuelles.

8.3. Suites vérifiant $u_{n+2} + a\,u_{n+1} + b\,u_n = c$

a/ $u_{n+2} + a\,u_{n+1} + b\,u_n = 0$

On écrit matriciellement : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est : $\lambda^2 + a\,\lambda + b = 0$.

Ce qui nous donne, en travaillant sur $\mathbb{C}$:

- quand cette matrice est diagonalisable ($\Delta \neq 0$) : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

  On obtient alors facilement : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

  Et finalement : $u_n = \mathrm{K}\,\lambda_1^n + \mathrm{L}\,\lambda_2^n$.
- quand elle n'est pas diagonalisable ($\Delta = 0$) : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

  On obtient alors facilement : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \mathrm{P} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\,\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \mathrm{P}^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$

  Et finalement : $u_n = \mathrm{K}\,\lambda^n + \mathrm{L}\,n\,\lambda^n$.

Dans tous les cas, K et L dépendent de u_0 et u_1.

Théorème :
L'ensemble des suites vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} + a\,u_{n+1} + b\,u_n = 0$, est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2.
L'équation caractéristique est : $r^2 + a\,r + b = 0$ qu'on résout.

- $\Delta \neq 0$ sur $\mathbb{C}$, ou $\Delta > 0$ sur $\mathbb{R}$: il y a 2 racines distinctes r_1, r_2.
  L'ensemble des solutions est donné par :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\,r_1^n + \beta\,r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

- $\Delta = 0$ sur $\mathbb{C}$, ou sur $\mathbb{R}$: il y a 1 racine double r.
  L'ensemble des solutions est alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\,r^n + \beta\,n\,r^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

- $\Delta < 0$ sur $\mathbb{R}$: il n'y a pas de racines réelles.
  On résout alors l'équation caractéristique sur $\mathbb{C}$, on a : $r_2 = \overline{r_1}$.
  De plus : $r_1 = |r|\,e^{i\theta}$, et $r_2 = |r|\,e^{-i\theta}$
  Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont alors :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\alpha\,|r|^n \cos n\theta + \beta\,|r|^n \sin n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$$

Démonstration : La structure d'espace vectoriel est donnée par le fait que c'est le noyau d'une application linéaire.

Le changement de notation est du au fait qu'on trouve des suites géométriques, dont la raison r est une valeur propre de la matrice $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

La seule chose qui reste à démontrer concerne le cas réel avec $\Delta < 0$.

On observe que : $\left(|r|^n e^{in\theta}\right)$ et $\left(|r|^n e^{-in\theta}\right)$ sont solution sur $\mathbb{C}$.

Ce qui fait que $(|r|^n \cos n\theta)$ et $(|r|^n \sin n\theta)$ sont solution sur $\mathbb{C}$ par combinaison linéaire de ces solutions.

Mais ces solutions sont réelles et donc **aussi** solution sur $\mathbb{R}$! Elles forment clairement une famille libre sur $\mathbb{C}$ comme sur $\mathbb{R}$ et forment donc une base de l'ensemble des solutions sur $\mathbb{C}$ comme sur $\mathbb{R}$. ■

b/ $u_{n+2} + a\, u_{n+1} + b\, u_n = c$

On cherche donc une solution particulière sous la forme...

- une suite constante $u_n = k$
  On obtient $k\,(1 + a + b) = c$, on a donc une solution quand $1 + a + b \neq 0$.
- quand $(1 + a + b = 0)$, on cherche une suite arithmétique $u_n = k\, n$
  On obtient $k\,((n+2) + (n+1)\,a + n\,b) = c$, d'où $k\,(2 + a) = c$, on a donc une solution quand $2 + a \neq 0$.
- quand on a à la fois : $\left\{ \begin{array}{rl} 1 + a + b & = 0 \\ 2 + a & = 0 \end{array} \right\}$, on cherche une suite $u_n = k\, n^2$

  On obtient $k\left((n+2)^2 + (n+1)^2\, a + n^2 b\right) = c$, d'où $k\,(4 + a) = c$ et donc $2k = c$. On a donc toujours une solution.

> Une fois qu'on a l'expression générale de la solution, on tient compte des conditions initiales éventuelles.

9. Puissances de matrices

Un problème courant est de calculer la puissance $m^{\text{ème}}$ d'une matrice. Même si l'énoncé doit vous guider, on passe ici en revue quelques cas habituels.

9.1. Matrice diagonalisable

On a : $\mathrm{D} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$
et donc :

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$$
$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{PDP}^{-1}\mathrm{PDP}^{-1} = \mathrm{PD}^2\mathrm{P}^{-1}$$

et par récurrence très facile :

$$\mathrm{A}^m = \mathrm{PD}^m\mathrm{P}^{-1}$$

de plus, si $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ alors $\mathrm{D}^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^m \end{pmatrix}$

Il ne reste « qu'un calcul » de produit de 3 matrices pour terminer, à savoir : $\mathrm{A}^m = \mathrm{PD}^m\mathrm{P}^{-1}$.

9.2. Utilisation d'une matrice dont une puissance est nulle

Si $\mathrm{A} = (\mathrm{B} + \mathrm{C})$, avec $\mathrm{BC} = \mathrm{CB}$, alors $\mathrm{A}^m = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{C}_m^k\, \mathrm{B}^{m-k}\mathrm{C}^k$ par la formule du binôme.

Si, de plus, par exemple, $\mathrm{C}^3 = 0$, alors $\mathrm{A}^m = \sum_{k=0}^{2} \mathrm{C}_m^k\, \mathrm{B}^{m-k}\mathrm{C}^k$ car tous les autres termes sont nuls.

Comme enfin, dans ce cas, on connaît les puissances de B (qui est le plus souvent diagonale...).

Heureusement que l'énoncé vous guide.

Il arrive qu'on utilise une combinaison des deux méthodes précédentes quand la matrice est simplement trigonalisable.

Si A est semblable à $A' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La puissance $m^{\text{ème}}$ de la première matrice est facile à obtenir, la deuxième est bien nilpotente et elles commutent... On calcule donc $(A')^m$ selon la deuxième méthode puis A^m avec la matrice de passage.

9.3. Utilisation d'un polynôme annulateur

Supposons par exemple que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$

On va montrer deux façons classiques de procéder.

- Par division euclidienne de polynômes

  On factorise $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$

  Par simple division euclidienne, on écrit : $X^m = Q(X)(X-1)(X-2) + aX + b$

  Comme on ne s'intéresse pas au quotient, on pose alors successivement $X = 1$ puis $X = 2$.

  Ce qui donne $\begin{cases} 1 = a + b \\ 2^m = 2a + b \end{cases}$ d'où $\begin{cases} a = 2^m - 1 \\ b = 2 - 2^m \end{cases}$ et enfin $A^m = (2^m - 1)A + (2 - 2^m)I_n$

  Cette méthode est intéressante quand le degré du polynôme annulateur est petit. Elle est applicable quelle que soit la dimension de la matrice A.

- Par suites récurrentes linéaires

  On a :

$$\begin{aligned} A^2 &= 3A - 2I_n \\ A^3 &= 3A^2 - 2A \\ &= 3(3A - 2I_n) - 2A \\ &= 7A - 6I_n \end{aligned}$$

  Par récurrence immédiate, les puissances de A sont donc combinaison linéaire de A et de I :

$$A^m = a_m A + b_m I_n$$

  On écrit alors A^{m+1} de 2 façons :

$$\begin{aligned} A^{m+1} &= a_m A^2 + b_m A \\ &= a_m(3A - 2I_n) + b_m A \\ &= (3a_m + b_m)A - 2a_m I_n \\ &= a_{m+1}A + b_{m+1}I_n \end{aligned}$$

  Ce qui donne :

$$\begin{aligned} a_{m+1} &= 3a_m + b_m \\ b_{m+1} &= -2a_m \end{aligned}$$

  Ou encore :

$$a_{m+2} = 3a_{m+1} - 2a_m$$

  Il ne reste qu'à rechercher, en tenant compte des conditions initiales, cette suite récurrente linéaire.